Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

# Integrale duble

Adina Juratoni

*Politehnica University of Timisoara*

7 Martie 2022

# Outline

# Integrale duble

Integrarea funcţiilor reale de o variabilă reală a constituit obiectul de studiu in clasa a XII-a. Calculul ariei cuprinse între graficele a două funcţii sau al lungimii unui arc de curbă plană sunt doar două dintre aplica ctiile imediate ale integralei definite. Trecerea la studiul funcţiilor reale cu două, trei sau mai multe variabile reale se impune în mod natural a fi studiată. Astfel vom extinde conceptul de integrală.

# Integrale duble

Orice mulţime mărginită $D$ din spaţiul metric euclidian $\mathbb{R}^2$ este conţinută într-un dreptunghi $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ cu laturile paralele cu axele de coordonate. ConsiderÂam $\Delta_x$ o diviziune segmentului $[a_1, b_1]$, adică

$$a_1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_m = b_1,$$

şi $\Delta_y$ o diviziune segmentului $[a_2, b_2]$, adică

$$a_2 = x_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_j \leq ... \leq y_n = b_2.$$

Reuniunea dreptunghiurilor astfel obţinute

$$\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

acoperă complet mulţimea $D$ şi $D \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_{ij}$.

# Integrale duble

## Definiţie

Spunem că familia de dreptunghiuri

$$\mathcal{P}_D = \{\Delta_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\}$$

realizează o partiţie a mulţimii $D$ şi numim norma partiţiei numărul pozitiv

$$\nu(\mathcal{P}_D) = \max\{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\}.$$

Familia punctelor intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$ corespunzătoare diviziunii $\Delta$ au ca elemente perechile $(\xi_i, \eta_j)$, unde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$.

# Integrale duble

Construim suma Riemann corespunzătoare funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diviziunii $\Delta$ şi punctelor intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$:

$$\sigma_f(\Delta, (\xi_\Delta, \eta_\Delta)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

care reprezintă suma volumelor pararlelipipedelor cu baza $[x_{i-1} - x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ şi înălţimea $f(\xi_i, \eta_j)$.

# Integrale duble

## Definiţie

Funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este integrabilă Riemann pe mulţimea mărginită $D$ dacă şi numai dacă există un număr real $I$ cu proprietatea: oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ şi o partiţie $\mathcal{P}_D$ cu norma diviziunii $\nu(\mathcal{P}_D) < \delta$ astfel încât pentru orice familie de puncte intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$ suma Riemann verifică inegalitatea

$$|\sigma_f(\Delta, (\xi_\Delta, \eta_\Delta)) - I| < \varepsilon.$$

Numărul $I$ (dacă există) este unic determinat, se numeşte integrala dublă a funcţiei $f$ pe domeniul $D$ şi se notează

$$I = \iint f(x, y)dxdy.$$

# Integrale duble

## Teoremă

Orice funcţie continuă pe un domeniu mărginit şi închis este integrabilă.

## Teoremă

Orice funcţie definită pe un domeniu mărginit şi închis ale cărei puncte de discontinuitate sunt situate pe un număr finit de arce netede este integrabilă.

# Proprietăţile integralelor duble

## Teoremă

- Integrala dublă este liniară:

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

oricare ar fi funcţiile integrabile $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, oricare ar fi scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Integrala dublă a unei funcţii pozitive este un număr pozitiv, adică

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ integrabile cu } f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

# Proprietăţile integralelor duble

## Teoremă

- Integrala dublă este liniară:

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy+\beta \iint_D g(x,y)dxdy,$$

oricare ar fi funcţiile integrabile $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, oricare ar fi scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Integrala dublă a unei funcţii pozitive este un număr pozitiv, adică

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ integrabile cu } f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

# Proprietăţile integralelor duble

## Teoremă

- Integrala dublă este aditivă relativ la domeniul de integrare: dacă domeniul compact de integrare $D$ şi dacă $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ este reuniunea a $n$ subdomenii $D_i$, $i = \overline{1,n}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ atunci are loc următoarea descompunere

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)\,dxdy,$$

oricare ar fi funcţia integrabilă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

# Proprietăţile integralelor duble

## Teoremă

- Orice funcţie integrabilă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are modulul $|f|$ integrabil şi în plus este verificată inegalitatea:

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

# Calculul integralei duble

## 1. Integrala dublă pe un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie reală continuă cu două variabile al cărui domeniu de definiţie este un dreptunghi, sau mai precis $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

**I.** În plus, presupunem că funcţia de sub semnul integrală este cu variabile separate, adică

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

unde $g : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$, $h : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$, sunt funcţii continue. Atunci are loc:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} g(x)dx \cdot \int\limits_{a_2}^{b_2} h(y)dy.$$

# Calculul integralei duble

## Exemplu

Să se calculeze următoarele integrale duble pe domeniile dreptunghiulare indicate:

**i)** $\iint\limits_D \cos 2x \sin^2 y dxdy$; $D = [0, \frac{\pi}{6}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$;

**ii)** $\iint\limits_D \frac{y^2 - 5}{x^2 + 25} dxdy$; $D = [0, 5] \times [3, 4]$.

# Calculul integralei duble

*Soluţie.* **i)** Deoarece funcţia de sub integrală poate fi scrisă sub forma $f_1(x) \cdot f_2(y)$ cu $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(y) = \sin^2 y$ rezultă

$$\iint\limits_D \cos 2x \sin^2 y dxdy = \int\limits_0^{\pi/6} \cos 2x dx \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 y dy$$

$$= \int\limits_0^{\pi/6} \cos 2x dx \cdot \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2y}{2} dy =$$

$$= \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi/6} \cdot \left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi\sqrt{3}}{32}.$$

# Calculul integralei duble

*Soluţie.* **ii)** Funcţia $f(x,y) = \frac{y^2-5}{x^2+25}$ poate fi scrisă sub forma $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, unde $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+25}$, iar $f_2(y) = y^2 - 5$ avem

$$\iint\limits_D \frac{y^2-5}{x^2+25}dxdy = \int\limits_0^5 \frac{1}{x^2+25}dx \cdot \int\limits_3^4 (y^2-5)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\text{arctg}\frac{x}{5}\right)\Big|_0^5 \cdot \left(\frac{y^3}{3} - 5y\right)\Big|_3^4 = \frac{\pi}{20} \cdot \frac{22}{3} = \frac{11\pi}{30}.$$

# Calculul integralei duble

## Calculul integrale duble

**II.** Presupunem acum că domeniul $D$ este dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$, dar renunţăm la ipoteza că funcţia continuă de sub semnul integrală ar avea variabilele separate. Vom avea o succesiune de două integrale:

- $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$
- $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

# Calculul integralei duble

## Calculul integrale duble

**II.** Presupunem acum că domeniul $D$ este dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$, dar renunţăm la ipoteza că funcţia continuă de sub semnul integrală ar avea variabilele separate. Vom avea o succesiune de două integrale:

- $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$
- $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

# Calculul integralei duble

## Exemplu

Calculaţi integrala dublă $I = \iint\limits_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy$, *unde* $D = [1, 2] \times [0, 2]$;

*Soluţie.* Funcţia de sub integrală nu este cu variabile separabile. Calcul ei poate fi abordat în două moduri: integrând pe rând în raport cu x şi apoi cu y, respectiv în raport cu y şi apoi cu x. Aceste integrale poartă numele de integrale iterate.

# Calculul integralei duble

*Metoda I.* Se integrează mai întâi în raport cu $y$ şi apoi în raport cu $x$ şi se obţine:

$$I = \iint\limits_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^2 (2x - 3y^2 + xy + 2)dy$$

$$= \int_1^2 \left(2xy - \frac{3y^3}{3} + \frac{xy^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_0^2 dx = \int_1^2 (6x - 4)dx$$

$$= (3x^2 - 4x)\Big|_1^2 = 5$$

# Calculul integralei duble

*Metoda II.* Se integrează mai întâi în raport cu $x$ şi apoi în raport cu $y$ şi se obţine:

$$I = \iint\limits_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy = \int_0^2 dy \int_1^2 (2x - 3y^2 + xy + 2)dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - 3xy^2 + \frac{x^2y}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 dy$$

$$= \int_1^2 \left(5 - 3y^2 + \frac{3y}{2}\right) dx = (3x^2 - 4x)\Bigg|_0^2 = 5$$

# Calculul integralei duble

## 3. Integrala dublă pe domenii simple

Pentru a stabili **regula generală de calcul a unei integrale duble** în cazul când domeniul $D$ nu mai este dreptunghi este necesară noţiunea de **domeniu standard** (sau simplu în raport cu o axă).

***Definiţie.*** Un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte domeniu standard în raport cu o axă (simplu în raport cu o axă) dacă orice dreaptă paralelă cu acea axă dusă prin domeniul $D$ intersectează frontiera acestuia numai în două puncte.

# Calculul integralei duble

Un domeniu **simplu în raport cu** $Oy$ este definit de

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

în care funcţiile $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ sunt continue pe $[a,b]$.
Analog domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ **simplu în raport cu** $Ox$ este definit de

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

unde $\psi_1$ şi $\psi_2$ sunt continue pe $[c,d]$.
Imaginea geometrică a acestor domenii este dată în figura 1.

# Calculul integralelor duble

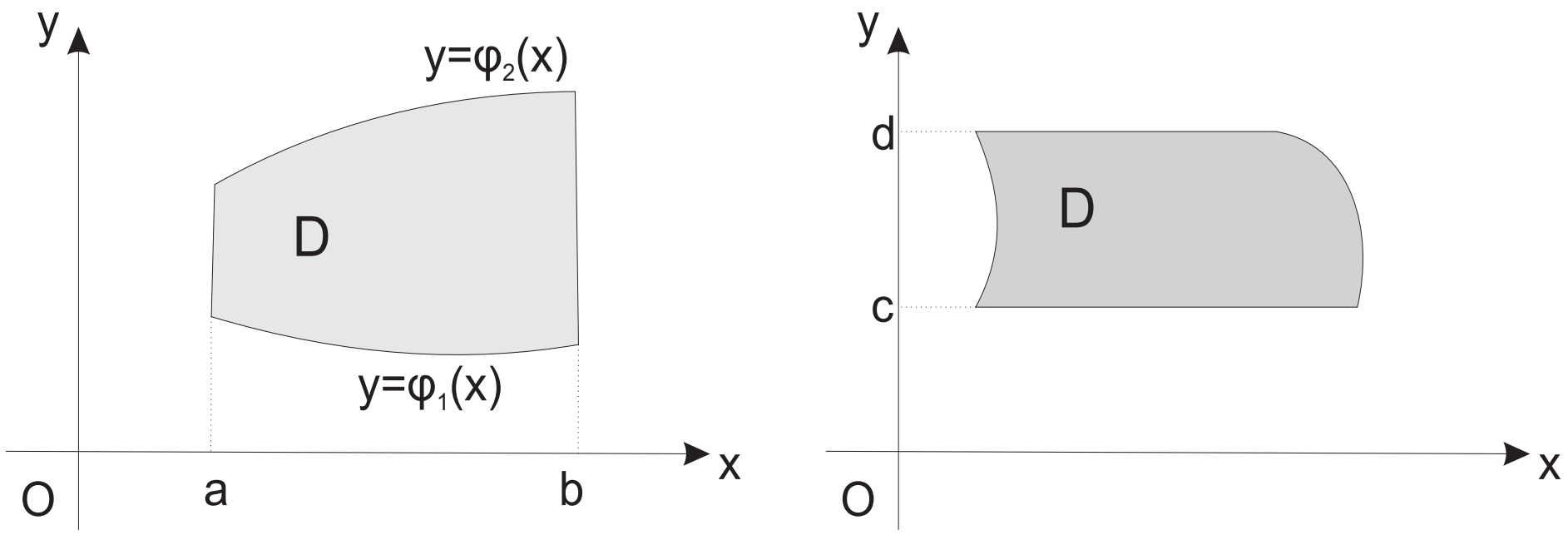


Figura 1

# Calculul integralelor duble

**Teoremă (Domeniu simplu în raport cu $y$).**

*Fie* f:D$\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o funcţie mărginită şi integrabilă pe domeniul compact $D$. Dacă pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala $\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ atunci există şi integrala $\int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

# Calculul integralelor duble

**Remarcă**

- În cazul când domeniul $D$ este simplu în raport cu $Ox$, avem

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

- Din egalităţile de mai sus se obţine direct egalitatea (Fubini)

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

# Calculul integralelor duble

**Remarcă**

- În cazul când domeniul $D$ este simplu în raport cu $Ox$, avem

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

- Din egalităţile de mai sus se obţine direct egalitatea (Fubini)

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

# Calculul integralelor duble

## Exemplu

Să se calculeze următoarele integrale duble:

- **i)** ${}_{D_1} xydxdy$, unde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$;
- **ii)** ${}_{D_2} xdxdy$, unde $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0, 0 \leq x \leq y\}$;
- **iii)** ${}_{D_3} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, $D_3$ fiind triunghiul mărginit de dreptele $y = 0, y = x + 1, y = -x + 1$.

# Calculul integralelor duble

*Soluţie.* **i)** $D_1$ din figura 3 este simplu în raport cu fiecare axă.

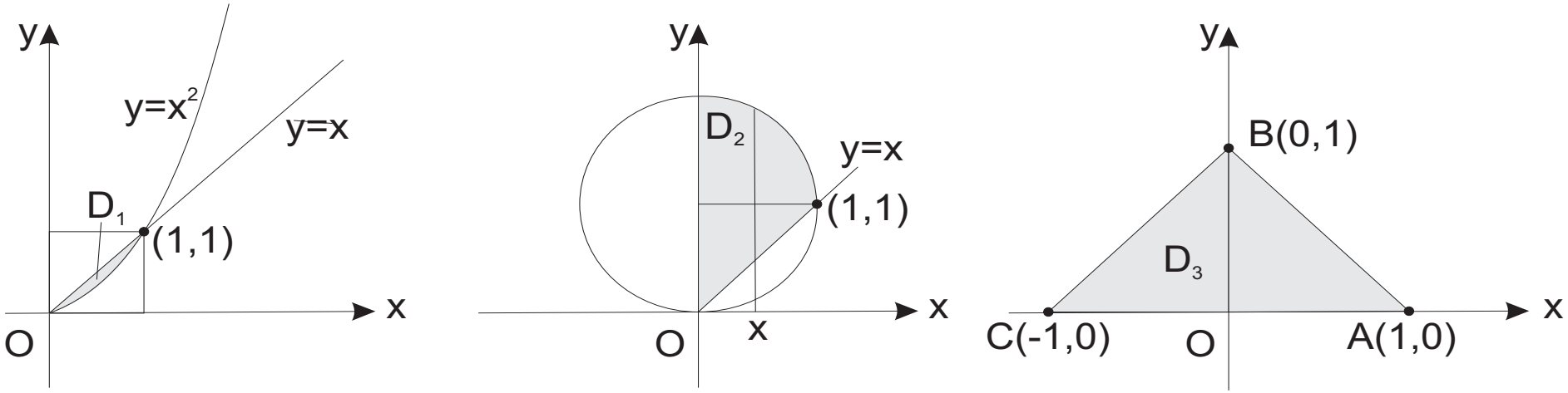


Figura 3

# Calculul integralelor duble

Considerând $D_1$ simplu în raport cu $Oy$ se poate scrie

$$\iint\limits_{D_1} xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xydy = \int\limits_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x^2 - x^4\right)dx = \frac{1}{2}$$

**ii)** Domeniul $D_2$ este simplu în raport cu fiecare axă. Considerându-l simplu în raport cu $Oy$ se poate scrie

$$\iint\limits_{D_2} xdxdy = \int\limits_0^1 x\left(\int\limits_x^{1+\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx = \int\limits_0^1 x\left(1+\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

# Calculul integralelor duble

**iii)** Vârfurile triunghiului $D_3$ sunt $A(1,0), B(0,1)$ şi $C(-1,0)$. Domeniul $D_3$ este simplu în raport cu fiecare axă, dar calculul este mai scurt considerând $D_3$ simplu în raport cu $Ox$, deci

$$\iint\limits_{D_3} \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{-y+1} \left(x^2+y^2\right) dx =$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{x=y-1}^{x=-y+1} dy$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (y-1)^3 dy - 2\int\limits_0^1 y^3 dy + 2\int\limits_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

# Aplicaţii ale integralei duble

## I. Calculul ariilor şi volumelor.

- Dacă $D \subset \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă având $FrD$ o curbă închisă şi netedă pe porţiuni, atunci aria mulţimii $D$ este dată de egalitatea

$$aria\,(D) = \iint\limits_D dxdy\,.$$

- Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, atunci volumul "cilindrului" $V$ cu baza $D$, mărginit de planul $xOy$ şi suprafaţa $z = f\,(x, y)$ are expresia

$$V = \iint\limits_D f\,(x, y)\,dxdy\,.$$

# Aplicaţii ale integralei duble

## I. Calculul ariilor şi volumelor.

- Dacă $D \subset \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă având $FrD$ o curbă închisă şi netedă pe porţiuni, atunci aria mulţimii $D$ este dată de egalitatea

$$aria\,(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

- Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, atunci volumul "cilindrului" $V$ cu baza $D$, mărginit de planul $xOy$ şi suprafaţa $z = f\,(x, y)$ are expresia

$$V = \iint\limits_D f\,(x, y)\,dxdy.$$

# Aplicaţii ale integralei duble

## II. Coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane.

- Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este o placă materială de grosime neglijabilă având densitatea
  $\rho : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, atunci

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy,\ x_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy,$$

$$y_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy.$$

- Dacă placa este omogenă ($\rho = \rho_0 =$ constant) atunci

$$m(D) = \rho_0 aria(D),\ x_G = \frac{1}{aria(D)} \iint xdxdy,\ y_G = \frac{1}{aria(D)} \iint ydx$$

# Aplicaţii ale integralei duble

**II. Coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane.**

- Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este o placă materială de grosime neglijabilă având densitatea
  $\rho : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, atunci

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy,\ x_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy,$$

$$y_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy.$$

- Dacă placa este omogenă ($\rho = \rho_0 =$ constant) atunci

$$m(D) = \rho_0 aria(D),\ x_G = \frac{1}{aria(D)} \iint xdxdy,\ y_G = \frac{1}{aria(D)} \iint ydx$$

# Aplicaţii ale integralei duble

## Exemplu

Să se calculeze centrele de greutate ale plăcilor plane omogene:
**i)** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\}$, $\rho = \rho_0 = const = 1$ (placă omogenă);
**ii)** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $\rho(x,y) = x + y$.

*Soluţie.* **i)** Domeniul $D$ este ilustrat în figura 4. Avem

$$aria\,(D) = \mu\,(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} dy = \int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$x_G = \frac{3}{8}\iint\limits_D xdxdy = \frac{3}{8}\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{x^2} dy = \frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^3 dx = \frac{3}{2};$$

$$y_G = \frac{3}{8}\iint ydxdy = \frac{3}{8}\int^2 dx \int^{x^2} ydy = \frac{3}{8}\int^2 \frac{x^4}{2} dx = \frac{6}{5}.$$

# Aplicaţii ale integralei duble

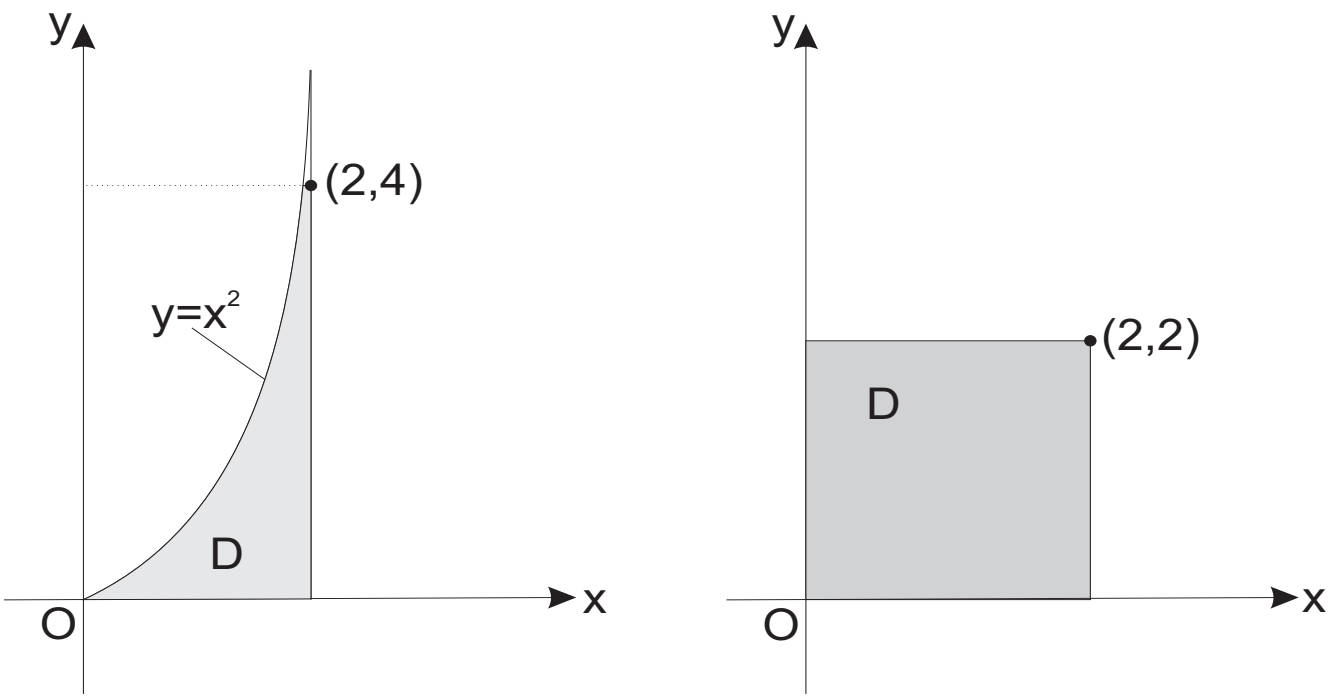


Figura 4

# Aplicaţii ale integralei duble

**ii)** Masa corpului este :

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (x+y)\,dy = 8;$$

$$x_G = \frac{1}{8}\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 dx \int_0^2 \left(x^2+xy\right)dy = \frac{7}{6};$$

$$y_G = \frac{1}{8}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 dx \int_0^2 \left(xy+y^2\right)dy = \frac{7}{6}.$$

Faptul că $x_G = y_G$ se explică prin aceea că $D$ este simetric, figura 4.

# Aplicaţii ale integralei duble

**III. Momentele statice şi momentele de inerţie ale plăcilor plane**

Momentul de inerţie $I_O$ al unui punct material $M(x,y)$ de masă $m$ în raport cu punctul $O(0,0)$ este dat de produsul dintre masa corpului şi pătratul distanţei $r = d(O,M)$, adică $I_O = mr^2$. Rezultă că momentul de inerţie al acestui sistem de puncte în raport cu punctul $O$ este

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho(x,y)\, dxdy,$$

# Aplicaţii ale integralei duble

Momentele de inerţie ale plăcii $D \subset \mathbb{R}^2$, având densitatea $\rho$ în raport cu axele de coordonate se definesc prin formulele

$$I_{Ox} = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y)\, dxdy,$$

$$I_{Oy} = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y)\, dxdy.$$

Astfel rezultă că $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$. Momentele statice în raport cu axele $Ox$ şi $Oy$ se definesc prin
$M_{Ox} = \iint\limits_D y\rho(x,y)\, dxdy$, $M_{Oy} = \iint\limits_D x\rho(x,y)\, dxdy$.

# Aplicaţii ale integralei duble

## Exemplu

- **i)** Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa $Oy$ al plăcii omogene
  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, a, b > 0\}$;
- **ii)** Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea (momentul polar) al plăcii omogene
  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \geq r^2, x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}$.

*Soluţie.* **i)** Domeniul $D$ esre reprezentat în figura 5 a). Placa fiind omogenă $\rho = \rho_0 -$constant. Atunci rezultă $I_{Oy} = \rho \iint\limits_D x^2 dxdy$.

# Aplicaţii ale integralei duble

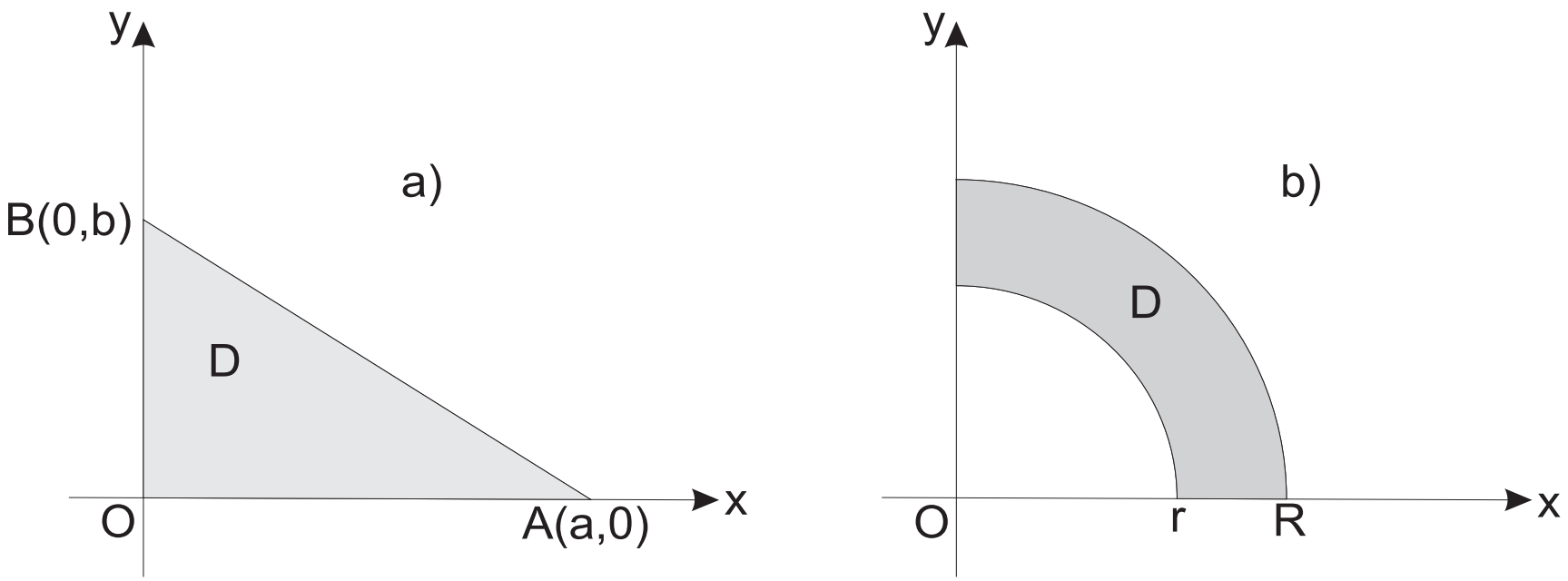


Figura 5

# Aplicaţii ale integralei duble

$$I_{Oy} = \rho_0 \iint\limits_{\Delta OAB} x^2 dxdy = \rho_0 \int\limits_0^a x^2 dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^a \left(x^2 - \frac{x^3}{a}\right) dx = \rho_0 \frac{ba^3}{12}.$$

Masa plăcii este:

$$m = \iint\limits_D \rho_0 dxdy = \rho_0 \iint\limits_{\Delta OAB} dxdy = \rho_0 aria\left(\Delta AOB\right) = \rho_0 \frac{ba}{2}.$$

# Aplicaţii ale integralei duble

**ii)** Momentul polar pentru placă $D \subset \mathbb{R}^2$, figura 5 b) este dat de integrala dublă

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho_0 dxdy,$$

în care prin trecere la coordonate polare avem

$$I_O = \rho_0 \iint\limits_\Delta \rho^2 \rho d\rho d\theta = \rho_0 \int\limits_r^R \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\rho_0 \pi}{8}\left(R^4 - r^4\right).$$

Masa plăcii este

$$m = \iint\limits_D \rho_0 dxdy = \rho_0 \iint\limits_\Delta \rho d\rho d\theta = \frac{\pi \rho_0}{4}\left(R^2 - r^2\right).$$

# Bibliografie

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union


- D. Păunescu, A. Juratoni, *Calcul Integral Avansat*, Ed. Orizonturi Universitare (2015).
- G. Babescu, O. Bundă, A. Juratoni, *Analiza Matematică*, Ed. Mirton (2011).
- https://math.libretexts.org/Courses/Mount$_Royal_University/MATH_2$200